Partie 4

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1 , A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z .

1) On suppose : $V(X) = V(Y) = V(Z) = 1$, $cov(X,Y) = cov(X,Z) = cov(Y,Z) = c$, où c est un réel donné.

On considère la matrice à coefficients réels d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$.

a) On note $M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles ayant 3 lignes et 1 colonne. On considère un élément de $M_{3,1}(\mathbb{R})$: $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et la variable aléatoire : $T = xX + yY + zZ$.

Montrer que l'on a : $V(T) = {}^tU\,M\,U$, où ${}^tU$ désigne la transposée de U.

b) Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. (On distinguera les cas : $c = 0$ et $c \neq 0$).

d) En déduire : $c \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

e) On suppose : $c \neq 1$. On considère le portefeuille (x,y,z) de rendement R.

Montrer que l'on a : $V(R) = (1-c)\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2\right] + \frac{1+2c}{3}$.

En déduire qu'il existe un unique portefeuille à déterminer de rendement de variance minimale.

2) On suppose dans cette question que X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$.

a) Montrer que le portefeuille de rendement de variance minimale est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Déterminer la variance de ce rendement.

b) Quelle est la loi de $X+Y+Z$? En déduire, à l'aide de la loi normale, une approximation de la probabilité que le rendement R du portefeuille ci-dessus soit supérieur ou égal à 4. On donne : $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 0{,}86$, où Φ est le fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.